ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction :

$$f_n : x \longrightarrow f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} e^{-x}$$

1° Calculer $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer le point à tangente parallèle à Ox et le ou les points d'inflexion de la Courbe C_n représentative de f_n, dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

2° Étudier les branches infinies de la courbe C_n.

3° Dans chacun des deux cas particuliers : $n = 2$ et $n = 3$, étudier les variations de $f_n(x)$, et tracer la courbe représentative C_n.

4° Démontrer que l'équation $f_3(x) = 0$ a une racine réelle unique a appartenant à l'intervalle $]-2, -1[$.

5° Vérifier que la suite (x_n) définie par $x_0 = -\frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = -1 - \frac{x_n^2}{2} - \frac{x_n^3}{6}$$

converge vers a, et utiliser cette convergence pour calculer a avec une erreur inférieure à 10^{-3}.

II

1° Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, trouver l'expression de l'intégrale :

$$\int_a^b t^n e^{-t} \, dt$$

en fonction de n, $f_n(a)$ et $f_n(b)$.

2° Déduire de ce calcul que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$$

est convergente, et donner sa valeur. Retrouver ce résultat par récurrence.

3° Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$f_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} \, dt$$

4° Utilisant cette expression intégrale de $f_n(x)$, démontrer que :

$$\forall\ x \geqslant 0,\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\, e^{-x}\, f_{n-k}\,(x) \;=\; f_n\,(2\,x)$$

et, plus généralement, que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\; e^{-x} f_{n-k}\,(\lambda\, x) = f_n\,((\lambda + 1)\, x)$$

5° Vérifier que, pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} f_n\,(t)\ \mathrm{d}t$$

est convergente et a pour valeur :

$$\sum_{k=0}^{n} f_k\,(x)$$

6° Comparer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ \lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!}\, e^{-t}\ \mathrm{d}t\ \right]$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!}\, e^{-t}\ \mathrm{d}t\ \right]$$

III

1° Pour tout $x > 0$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\frac{x^k}{k!}\, e^{-x} \;=\; p_k\,(x)$$

Vérifier la proposition suivante :

$$\forall\ x_1 > 0 \quad \text{et} \quad \forall\ x_2 > 0,\quad \sum_{r=0}^{k} p_r\,(x_1)\ p_{k-r}\,(x_2) \;=\; p_k\,(x_1 + x_2)$$

2° Étudier, pour tout $x > 0$, le rayon de convergence de la série entière de terme général :

$$u_k(y) \;=\; p_k(x)\, y^k \qquad (y \in \mathbb{R};\quad k \in \mathbb{N})$$

et calculer sa somme :

$$G\,(x,\, y) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} p_k\,(x)\, y^k$$

3° Vérifier que, pour tout $x > 0$, la fonction $y \longrightarrow G(x,y)$ est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, et calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sa dérivée n^e, $G_y^{(n)}(x,y)$. Calculer alors la valeur de la somme :

$$S_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)\, p_k(x)$$

4° Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de la série de terme général $k^n p_k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$.

5° Posant alors, pour tout $x > 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n\, p_k(x) = M_n(x)$$

montrer, en utilisant les résultats du 2°, que la fonction $M_n : x \longrightarrow M_n(x)$ est une fonction polynôme de degré n, dont on précisera le terme de plus haut degré en x.

IV

1° Calculer, pour tout $x > 0$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, la somme :

$$\Phi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\, e^{kt}$$

après avoir vérifié la convergence de la série.

2° $n \in \mathbb{N}$ étant donné, démontrer l'existence, pour tout $x > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ de la somme :

$$\Phi_n(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt}\, f_n(kt)\, p_k(x)$$

où f_n est la fonction étudiée dans la partie I, et vérifier que :

$$\Phi_n(x, t) = \sum_{p=0}^{n} M_p(x)\, \frac{t'^p}{p!}$$

3° Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x > 0$, la fonction :

$$R_n : \theta \longrightarrow R_n(x, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{k\theta}\, k^{n+1}\, p_k(x)$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et donner la valeur de $R_n(x, 0)$.

4° Établir l'existence, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, d'un nombre θ compris entre 0 et t tel que :

$$\Phi(x, t) - \Phi_n(x, t) \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\, R_n(x, \theta)$$

et montrer que $\Phi_n(x, t)$ est la partie principale du développement limité à l'ordre n de $\Phi(x, t)$ au voisinage de 0.

5° Démontrer alors que la fonction $t \longrightarrow \Phi(x, t)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et que l'on a, pour tout $x > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Phi_t^{(n)}(x, 0) = M_n(x)$$